二項分布の Poisson 分布による近似

Theorem. 確率変数 X が二項分布 $B(n,p)$ に従う, つまり $X=k$ $(0 \leq k \leq n)$ となる確率 $P(X=k)$ が

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

となるとき, $np=\lambda$(一定) のまま $n \to \infty$ の極限を考えると, X は $Po(\lambda)$ に従う, つまり

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \ (k \geq 0)$$

となる.

Proof. $p = \dfrac{\lambda}{n}$ であるからこれを代入すると

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &\to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdots 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 \ (n \to \infty) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

となることがわかる.

以上より定理が示された. ■

※この結果により, n が十分大きいときの二項分布に従う確率変数の確率を Poisson 分布を用いて近似することができる.